Análisis Funcional – Evaluación 4. Soluciones

Ejercicio 1. Sea X un espacio normado y supongamos que hay n puntos $\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ y un número $r > 1$ tales que

$$B(0,r) \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, 1) \tag{1}$$

Prueba que X tiene dimensión finita.

Solución. Sea $M = \operatorname{Lin}(\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$, y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Es claro que M es un subespacio de X de dimensión finita. Puesto que $r > 1$, se verifica que:

$$S_X \subset B(0,r) \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, 1). \tag{2}$$

Deducimos que para todo $x \in S_X$ se tiene que $\min \{\|x - x_k\| : 1 \leqslant k \leqslant n\} < 1$, lo que implica que $\operatorname{dist}(x, M) < 1$. Por tanto, no puede existir ningún vector $z \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(z, M) = 1$ lo que, en virtud del lema de Riesz, implica que M no es un subespacio propio de X, es decir, $M = X$, por lo que X es de dimensión finita. ☺

Comentarios. El lema de Riesz es la herramienta adecuada para hacer este sencillo ejercicio. En los apuntes del curso el lema de Riesz consta de dos afirmaciones:

A) Sea M un subespacio propio de dimensión finita de un espacio normado X, entonces existe algún $x \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.

B) Sea M un subespacio propio cerrado de un espacio normado X, entonces para cada $\alpha \in]0,1[$ existe algún $x \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) > \alpha$.

Está claro que en este ejercicio conviene usar el punto A), y así lo habéis hecho la mayoría, pero algunos han querido usar el punto B) y no han sabido hacerlo correctamente porque, con la idea de llegar a una contradicción con lo afirmado en B), pretenden deducir de la igualdad (2) que:

$$S_X \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \rho) \quad \text{para algún } \rho \in]0,1[. \tag{3}$$

Para ello razonan por reducción al absurdo más o menos como sigue: Si para todo $\rho \in]0,1[$ la inclusión (3) fuera falsa, entonces para cada $\rho \in]0,1[$ existirá un $x \in S_X$ tal que $\|x - x_k\| \geqslant \rho$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, y haciendo $\rho \to 1$ deducen que $\|x - x_k\| \geqslant 1$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ lo que está en contradicción con (2). Luego, concluyen, debe existir un $\rho \in]0,1[$ para el cual se verifica (3), pero si $M \neq X$ eso contradice lo afirmado en B), luego $M = X$. ¿Dónde está el fallo? Si no lo ves mala cosa. Piénsalo antes de seguir leyendo. Algo que un matemático ha de tener siempre muy presente son las relaciones de dependencia que hay entre las variables que intervienen en una situación dada. A veces dichas relaciones de dependencia son explícitas y otras no. En el caso que nos ocupa, la negación de (3) nos dice, efectivamente, que para cada $\rho \in]0,1[$ existirá un $x \in S_X$ tal que $\|x - x_k\| \geqslant \rho$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, pero un tal x está claro que puede depender de ρ, es decir, debemos escribir $x = x_\rho$, y por eso en la desigualdad $\|x_\rho - x_k\| \geqslant \rho$ no puede hacerse $\rho \to 1$ porque no controlamos lo que pasa con x_ρ. Bueno, diréis, es un error en el que puede caer cualquiera. Vale, digo yo, cualquiera que no esté en tercero de matemáticas, porque sobre esas relaciones de dependencia se insiste muchísimo cuando se presentan por primera vez conceptos como la continuidad uniforme o la convergencia uniforme. Pero lo que no entiendo es que en este ejercicio se use el punto B) en vez del A) que te lo da todo hecho.

¿Cómo puede hacerse este ejercicio usando el punto B)? Te lo digo. Si $M \neq X$, como M es un subespacio de dimensión finita y por tanto cerrado, dado $\alpha \in]0,1[$, por B) existe $z \in S_X$ tal que $\|z - x\| > \alpha$ para todo $x \in M$. Sea $\frac{1}{\alpha} < \rho < r$. Tenemos que $\rho z \in B(0,r)$, y para todo $x \in M$ es

$\|\rho z - \rho x\| > \rho\alpha > 1$. En particular, como $\frac{1}{\rho}x_k \in M$, deducimos que $\|\rho z - x_k\| > 1$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, lo que nos dice que $\rho z \notin \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, 1)$ en contradicción con (1).

Algunos pocos hacen este ejercicio sin usar el lema de Riesz. Una manera consiste en usar la proyección cociente $\pi : X \to X/M$. Sabemos que $\pi\big(B(x,r)\big) = B_{X/M}(\pi(x), r)$. Puesto que para $1 \leqslant k \leqslant n$ es $\pi(x_k) = x_k + M = M$ que es el elemento neutro, 0, en el espacio vectorial X/M, de (1) deducimos que

$$\pi\big(B(0,r)\big) = B_{X/M}(0,r) \subset B_{X/M}(0,1) \tag{4}$$

Sea $x \in X$ y supongamos que $\operatorname{dist}(x, M) = \|x + M\| = \rho > 0$. Entonces tenemos que $\frac{1}{\rho} < \frac{r}{\rho}$ y si $s > 0$ es tal que $1 < s\rho < r$ resulta que $sx + M \in B_{X/M}(0,r)$ pero $sx + M \notin B_{X/M}(0,1)$ lo que contradice (4). Luego para todo $x \in X$ ha de ser $\operatorname{dist}(x, M) = 0$, es decir, $x \in M$, por lo que $X = M$.

Otra idea, la que más me gusta, consiste en iterar la hipótesis de la forma siguiente. Partiendo de (1) deducimos que:

$$B(0,1) \subset \bigcup_{k=1}^{n} B\big(\frac{x_k}{r}, \frac{1}{r}\big) = \bigcup_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{r} + \frac{1}{r}B(0,1)\right) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{r} + \frac{1}{r}\left(\bigcup_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{r} + \frac{1}{r}B(0,1)\right)\right)\right) =$$
$$= \bigcup_{k,j=1}^{n} \left(\frac{x_k}{r} + \frac{x_j}{r^2} + \frac{1}{r^2}B(0,1)\right) = \bigcup_{k,j=1}^{n} B\big(z_{kj}, \frac{1}{r^2}\big)$$

Donde hemos puesto $z_{kj} = \frac{x_k}{r} + \frac{x_j}{r^2}$. Puesto que este procedimiento puede continuarse hasta llegar a bolas de radio $\frac{1}{r^q} < \frac{1}{3}$, deducimos que existe un conjunto finito de bolas $B\big(u_i, \frac{1}{3}\big)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, tales que $B(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\big(u_i, \frac{1}{3}\big)$ y por tanto $\overline{B}(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \overline{B}\big(u_i, \frac{1}{3}\big)$. Esto implica que X es de dimensión finita ya que sabemos que en todo espacio normado de dimensión infinita hay una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de la esfera unidad tales que $\|x_p - x_q\| \geqslant 1$ siempre que $p \neq q$, por lo que en dicho espacio la esfera unidad no puede estar contenida en una unión finita de bolas de radio menor que $\frac{1}{2}$.

Para terminar, decir que un subespacio M no es trivial significa que $M \neq \{0\}$ y $M \neq X$; decir que un subespacio es propio significa que $M \neq X$.

Ejercicio 2. Sea

$$A = \{x \in c_0 : x(2n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}, \qquad B = \{x \in c_0 : x(2n-1) = nx(2n) \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Prueba que A y B son subespacios cerrados de c_0, que $A + B \neq c_0$ y que $A + B$ es denso en c_0.

Solución. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\varphi_n, \psi_n : c_0 \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi_n(x) = x(2n), \qquad \psi_n(x) = x(2n-1) - nx(2n) \qquad (x \in c_0)$$

Claramente φ_n y ψ_n son funcionales lineales y

$$|\varphi_n(x)| = |x(2n)| \leqslant \|x\|_\infty, \quad |\psi_n(x)| \leqslant |x(2n-1)| + n|x(2n)| \leqslant (1+n)\|x\|_\infty.$$

Por tanto dichos funcionales lineales son continuos por lo que $\operatorname{Ker}(\varphi_n)$ y $\operatorname{Ker}(\psi_n)$ son hiperplanos cerrados, y como evidentemente:

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\varphi_n), \quad B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\psi_n)$$

deducimos que A y B son subespacios cerrados.

Sea $x \in c_0$ y supongamos que $x = a + b$ con $a \in A$, $b \in B$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ debe cumplirse que

$$\begin{aligned} x(2n) &= a(2n) + b(2n) = b(2n) \\ x(2n-1) &= a(2n-1) + b(2n-1) = a(2n-1) + nx(2n) \end{aligned}$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
a(2n-1) &= x(2n-1) - nx(2n), \;\; a(2n) = 0 && (5)\\
b(2n-1) &= nx(2n), \;\; b(2n) = x(2n) && (6)
\end{aligned}
$$

Por tanto cualquier sucesión $x \in c_0$ tal que $\{nx(2n)\} \notin c_0$, por ejemplo la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, no está en $A+B$. Luego $A+B \subsetneqq c_0$.

Si $x \in c_{00}$ entonces, como claramente $\{x(2n)\} \in c_{00}$ y $\{x(2n-1)\} \in c_{00}$, deducimos que las sucesiones a y b definidas para todo $n \in \mathbb{N}$ por las igualdades (5) y (6), verifican que $a \in A \cap c_{00}$ y $b \in B \cap c_{00}$. Luego $c_{00} = (c_{00} \cap A) + (c_{00} \cap B) \subset A+B$. Por lo que $\overline{c_{00}} = c_0 \subset \overline{A+B} \subset c_0$, esto es, $\overline{A+B} = c_0$. ☺

Comentarios. Casi todos hacéis bien este ejercicio. Me ha llamado la atención que algunos “prueban” que $c_{00} = A+B$ algo realmente extraño. Otros usan en c_0 la norma $\|\,.\,\|_1$, deben pensar que toda sucesión convergente a cero está en ℓ_1. Algunos os tomáis el trabajo de probar que los funcionales φ_n y ψ_n son lineales, bien, vale, de acuerdo, pero por lo que a mí se refiere podéis ahorraros ese trabajo porque los funcionales y operadores que consideramos son siempre trivialmente lineales y no tiene interés ninguno comprobar que efectivamente es así; ahora, si lo haces, hazlo completo, no te limites a probar solamente la aditividad. Para terminar, en este ejercicio el espacio de referencia es c_0 y no es necesario para nada considerar a c_0 como subespacio de ℓ_∞. Lo digo porque me ha llamado la atención que algunos razonan así: Como $c_{00} \subset A+B \subset c_0$, y sabemos que $c_0 = \overline{c_{00}}$, deducimos que $c_0 = \overline{c_{00}} \subset \overline{A+B} \subset \overline{c_0}$ y, como c_0 es cerrado en ℓ_∞, $\overline{c_0} = c_0$, por lo que obtenemos $\overline{A+B} = c_0$. Pregunto ¿qué hubiera pasado si c_0 no fuera cerrado en ℓ_∞? ¿Ya no sería cierto que $\overline{A+B} = c_0$? Estas dudas pueden surgir si miras a c_0 dentro de ℓ_∞ y no tienes claro en qué espacio estás trabajando. Hay que tener siempre claro el contexto, es decir, el espacio de referencia, en este caso $(c_0, \|\,.\,\|_\infty)$, y que todos los conceptos son relativos a dicho espacio contexto. Y todo espacio normado es cerrado respecto de sí mismo.